OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 15 februarie 2025
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a VIII-a

1. a) (3p) Fie a, b și c numere reale astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 + 68 = 8a + 10b + 12c$. Să se arate că $5a - 2b + c \in [-8, 40]$.

Ana Marcela Popa, Rădăuți

b) (4p) Se consideră numerele reale x și y astfel încât $x \in [-2, 1]$ și $x = 3y - 2$. Determinați valoarea expresiei $E = \sqrt{(x+2)^2} + |x-1| + \sqrt{3(x+2)^2 + 9y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + 3(1-x)^2}$.

Aurica Mihaela Andronic, Pârtești

<u>Soluție:</u>

a) $a^2 + b^2 + c^2 + 68 = 8a + 10b + 12c \Leftrightarrow (a-4)^2 + (b-5)^2 + (c-6)^2 = 9$.

$(a-4)^2 \leq 9 \Rightarrow a - 4 \in [-3, 3] \Rightarrow a \in [1, 7] \Rightarrow 5a \in [5, 35]$,

$(b-5)^2 \leq 9 \Rightarrow b - 5 \in [-3, 3] \Rightarrow b \in [2, 8] \Rightarrow -2b \in [-16, -4]$,

$(c-6)^2 \leq 9 \Rightarrow c - 6 \in [-3, 3] \Rightarrow c \in [3, 9]$.

Deci, $5a - 2b + c \in [-8, 40]$.

b) $E = |x+2| + |x-1| + \sqrt{3(x+2)^2 + (x+2)^2} + \sqrt{4(x-1)^2} \Leftrightarrow E = 3|x+2| + 3|x-1|$.

Din $x \in [-2, 1] \Rightarrow |x+2| = x+2$ și $|x-1| = 1-x$. Se obține E = 9.

<u>Barem</u>

a) $(a-4)^2 + (b-5)^2 + (c-6)^2 = 9$	1 p
$(a-4)^2 \leq 9 \Rightarrow a - 4 \in [-3, 3] \Rightarrow a \in [1, 7]$ $(b-5)^2 \leq 9 \Rightarrow b - 5 \in [-3, 3] \Rightarrow b \in [2, 8]$ $(c-6)^2 \leq 9 \Rightarrow c - 6 \in [-3, 3] \Rightarrow c \in [3, 9]$	1 p
$5a \in [5, 35]$, $-2b \in [-16, -4]$, $c \in [3, 9] \Rightarrow 5a - 2b + c \in [-8, 40]$	1 p
b) $E = 3|x+2| + 3|x-1|$	2 p
$x \in [-2, 1] \Rightarrow |x+2| = x+2$ și $|x-1| = 1-x$	1 p
E = 9	1 p

2. Fie mulțimea $A = \left\{ x \in Q \;/\; x = \dfrac{a - b\sqrt{2027}}{b - c\sqrt{2027}}, \text{cu } a, b, c \text{ numere naturale prime} \right\}$.

a) (3p) Calculați cardinalul mulțimii A.

b) (4p) Știind că $m \in$ A, $n \in Q^*$ și $n + \dfrac{m}{n} = 2025$, calculați $n + n^2 + \dfrac{m}{n} + \dfrac{m^2}{n^2}$ și descompuneți rezultatul în produs de puteri de numere prime.

Petru Nicuță, Rădăuți

<u>Soluție:</u>

a) $x = \dfrac{\left(b + c\sqrt{2027}\right)\left(a - b\sqrt{2027}\right)}{b^2 - 2027c^2} = \dfrac{(ab - 2027bc) + \sqrt{2027}\left(ac - b^2\right)}{b^2 - 2027c^2}$.

Cum $x \in$ Q, iar *a, b,* c sunt numere naturale prime $\Rightarrow$ $ac - b^2 = 0$, deci $ac = b^2$, adică $a = b = c$.

Se obține $x = 1$, deci card A = 1.

b) Dacă $m \in$ A $\Rightarrow$ $m = 1$ $\Rightarrow$ $n + \dfrac{1}{n} = 2025 = 45^2 \; /^2$ $\Rightarrow$ $n^2 + 2 + \dfrac{1}{n^2} = 45^4$, de unde $n^2 + \dfrac{1}{n^2} = 45^4 - 2$.

Atunci $n + n^2 + \dfrac{m}{n} + \dfrac{m^2}{n^2} = 2025 + 45^4 - 2 = 45^2 + 45^4 - 2 = 45^4 - 1 + 45^2 - 1 = (45^2 - 1)(45^2 + 1) +$

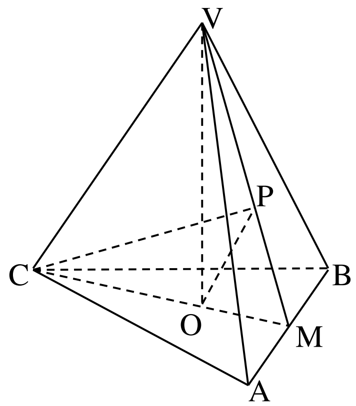
$+ (45^2 - 1) = (45 - 1)(45 + 1)(45^2 + 2) = 44 \cdot 46 \cdot (45^2 + 2) = 2^3 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 2027$.

<u>Barem</u>

a) $x = \dfrac{(ab - 2027bc) + \sqrt{2027}\left(ac - b^2\right)}{b^2 - 2027c^2}$	1p
$x \in$ Q, iar *a, b,* c sunt numere naturale prime $\Rightarrow$ $ac - b^2 = 0$, deci $ac = b^2$, adică $a = b = c$	1p
$x = 1$, deci card A = 1	1p
b) $m \in$ A $\Rightarrow$ $m = 1$ $\Rightarrow$ $n + \dfrac{1}{n} = 2025$	1p
$n^2 + \dfrac{m^2}{n^2} = \left(n + \dfrac{1}{n}\right)^2 - 2 = 2025^2 - 2 = 4100623$	1p
$n + n^2 + \dfrac{m}{n} + \dfrac{m^2}{n^2} = 4102648$	1p
$n + n^2 + \dfrac{m}{n} + \dfrac{m^2}{n^2} = 45^2 + 45^4 - 2 = 45^4 - 1 + 45^2 - 1 = (45^2 - 1)(45^2 + 1) + (45^2 - 1) =$ $(45 - 1)(45 + 1)(45^2 + 2) = 44 \cdot 46 \cdot (45^2 + 2) = 2^3 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 2027$	1p

3. Se consideră piramida triunghiulară regulată VABC cu vârful în V și O centrul bazei ABC. Fie M mijlocul muchiei AB și CP bisectoarea unghiului $\sphericalangle VCM$, $P \in VM$. Arătați că $PO = 2 \cdot MO$ dacă și numai dacă $VA = AB\sqrt{3}$.

Supliment Gazeta Matematică Nr. 9/2024



Soluție:

Dacă PO = 2MO, avem PO = CO, deci triunghiul OCP este isoscel și $\sphericalangle OCP \equiv \sphericalangle OPC$. Cum $\sphericalangle OCP \equiv \sphericalangle VCP$, avem $\sphericalangle OPC \equiv \sphericalangle VCP$ deci OP//CV ceea ce implică

$\Delta MOP \sim \Delta MCV \Rightarrow \frac{MO}{MC} = \frac{OP}{CV} \Leftrightarrow AV = AB\sqrt{3}$.

Dacă $AV = AB\sqrt{3}$, folosim teorema bisectoarei în ΔCVM

și obținem $\frac{CV}{MC} = \frac{VP}{PM} \Leftrightarrow \frac{AB\sqrt{3}}{\frac{AB\sqrt{3}}{2}} = \frac{VP}{PM} \Leftrightarrow VP = 2PM$. Cum CO = 2MO, obținem OP//CV, de unde,

folosind TFA, deducem că $OP = \frac{AB\sqrt{3}}{3}$. Deci OP = 2MO.

Barem

1. Dacă PO = 2MO, avem PO = CO, deci triunghiul OCP este isoscel	1p
Demonstrează că OP//CV	1p
$\Delta MOP \sim \Delta MCV \Rightarrow \frac{MO}{MC} = \frac{OP}{CV} \Leftrightarrow AV = AB\sqrt{3}$	1p
2. Dacă $AV = AB\sqrt{3}$, folosesc teorema bisectoarei în ΔCVM și obțin $\frac{CV}{MC} = \frac{VP}{PM} \Leftrightarrow \frac{AB\sqrt{3}}{\frac{AB\sqrt{3}}{2}} = \frac{VP}{PM} \Leftrightarrow VP = 2PM$	2p
Demonstrează că OP//CV	1p
Folosesc TFA în triunghiul MCV și obțin că $OP = \frac{AB\sqrt{3}}{3}$. Deci OP = 2MO	1p

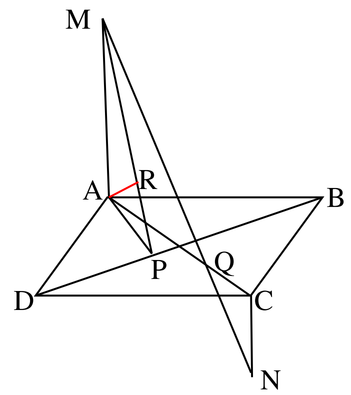
4. Pe planul dreptunghiului ABCD se construiesc perpendicularele MA și NC, situate de o parte și de alta a planului, astfel încât MA = 3NC.

a) (3p) Calculați valoarea raportului dintre aria triunghiului BQC și aria patrulaterului ABQD, unde Q este punctul de intersecție al dreptelor MN și AC.

b) (4p) Dacă CN = AD = $\frac{AB}{4}$, arătați că distanța de la punctul A la planul (MBD) este egală cu $\frac{12}{13}\cdot AD$.

Gabriela Cica Sascău, Rădăuți

<u>Soluție:</u>



a) MA și NC sunt perpendiculare pe (ABC) implică MA//NC deci ΔNCQ~ΔMAQ, de unde se obține

$$\frac{CQ}{AQ}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{A_{\Delta BQC}}{A_{\Delta ABC}}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{A_{\Delta BQC}}{A_{ABCD}}=\frac{1}{8}.$$

$$A_{ABQD}=6A_{\Delta BQC}\Rightarrow\frac{A_{\Delta BQC}}{A_{ABQD}}=\frac{1}{6}.$$

b) Se construiește $AP\perp BD$. Folosind Teorema celor 3 perpendiculare se obține $MP\perp BD$.
Se consruiește $AR\perp MP$ și se demonstrează că $BD\perp(MAP)$ deci $AR\perp BD$, ceea ce implică $AR\perp(MBD)$ și AR = d(A, (MBD)).
Se calculează AP = $\frac{4AD}{\sqrt{17}}$ și MP = $\frac{13AD}{\sqrt{17}}$, de unde se obține AR = $\frac{12AD}{13}$.

<u>Barem</u>

a) MA și NC sunt perpendiculare pe (ABC) implică MA//NC deci ΔNCQ~ΔMAQ	1p
$\frac{CQ}{AQ}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{A_{\Delta BQC}}{A_{\Delta ABC}}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{A_{\Delta BQC}}{A_{ABCD}}=\frac{1}{8}$	1p
$A_{ABQD}=6A_{\Delta BQC}\Rightarrow\frac{A_{\Delta BQC}}{A_{ABQD}}=\frac{1}{6}$	1p
b) Arată că distanța de la punctul A la planul (MBD) este AR	2p
Calculează AP = $\frac{4AD}{\sqrt{17}}$ și MP = $\frac{13AD}{\sqrt{17}}$	1p
Finalizare: d(A,(MBD)) = $\frac{12AD}{13}$	1p

Notă: **Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.**