OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 15 februarie 2025
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VI-a

1. Se consideră mulțimile $A=\{1,2,3,...,2025\}$ și $B=\{b\in\mathbb{N}\,/\,b$ pătrat perfect$\}$.

(4p) a) Determinați mulțimea $A\cap B$ și apoi scrieți toate elementele acesteia care sunt cuburi perfecte.

(3p) b) Dacă $C=\{c\in\mathbb{N}\,/\,c$ are exact 3 divizori naturali$\}$, determinați câte elemente are mulțimea $A\cap B\cap C$.

Claudia Marchitan, Suceava

***Soluție*. a)** $A\cap B$ este formată din toate pătratele perfecte din A. Cum $2025=45^2$, avem:

$A\cap B=\{1,4,9,16,...,2025\}=\{1^2,2^2,3^2,...,45^2\}$

Cuburile perfecte din $A\cap B$ sunt acele elemente care au baza puterii cub perfect. Singurele cuburi perfecte de la 1 la 45 sunt 1, 8 și 27.

Atunci, cuburile perfecte din $A\cap B$ sunt: $1^2,8^2,27^2$, adică 1, 64 și 729.

b) Singurele numere naturale care au exact 3 divizori naturali sunt pătratele numerelor prime.

$A\cap B\cap C=\{x\in A\cap B\,/\,x=p^2,\ p$ prim$\}$

$A\cap B\cap C=\{2^2,3^2,5^2,7^2,11^2,13^2,17^2,19^2,23^2,29^2,31^2,37^2,41^2,43^2\}$

$A\cap B\cap C$ are 14 elemente.

Barem.

a) $A\cap B=\{1,4,9,16,...,2025\}=\{1^2,2^2,3^2,...,45^2\}$	**2p**
Cuburile perfecte din $A\cap B$ sunt acele elemente care au baza puterii cub perfect. Singurele cuburi perfecte de la 1 la 45 sunt 1, 8 și 27.	**1p**
Cuburile perfecte din $A\cap B$ sunt: $1^2,8^2,27^2$, adică 1, 64 și 729.	**1p**
b) Singurele numere naturale care au exact 3 divizori naturali sunt pătratele numerelor prime.	**1p**
$A\cap B\cap C=\{2^2,3^2,5^2,7^2,11^2,13^2,17^2,19^2,23^2,29^2,31^2,37^2,41^2,43^2\}$ $A\cap B\cap C$ are 14 elemente.	**2p**

2. Fie șirul de fracții ordinare $\frac{2054}{30},\frac{2055}{31},\frac{2056}{32},....$

(4p) a) Stabiliți o regulă de formare a șirului și scrieți următorii 5 termeni.

(3p) b) Cu regula găsită, aflați câți termeni ai șirului sunt numere naturale.

Supliment Gazeta Matematică Nr.10/2024

***Soluție*. a)** O regulă este:

$$\frac{2024+30}{30},\frac{2024+31}{31},\frac{2024+32}{32},\frac{2024+33}{33},\frac{2024+34}{34},\frac{2024+35}{35},\frac{2024+36}{36},\frac{2024+37}{37},...$$

Adică $\frac{2054}{30},\frac{2055}{31},\frac{2056}{32},\frac{2057}{33},\frac{2058}{34},\frac{2059}{35},\frac{2060}{36},\frac{2061}{37},...$

b) Toți termenii șirului sunt de forma $\frac{2024+n}{n}$, unde n este număr natural mai mare sau egal cu 30.

$\frac{2024+n}{n}\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{2024}{n}+\frac{n}{n}\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{2024}{n}+1\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{2024}{n}\in\mathbb{N}\Rightarrow n$ este un divizor al lui 2024. Dar, ținând cont că $n\geq 30$, obținem $n\in\{44,46,88,92,184,253,506,1012,2024\}$.

Deci, 9 termeni ai șirului sunt numere naturale.

Barem.

a) Găsește o regulă.	**1p**

Scrie $\frac{2054}{30},\frac{2055}{31},\frac{2056}{32},\frac{2057}{33},\frac{2058}{34},\frac{2059}{35},\frac{2060}{36},\frac{2061}{37},...$	**3p**
b) $\frac{2024+n}{n}\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{2024}{n}+\frac{n}{n}\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{2024}{n}+1\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{2024}{n}\in\mathbb{N}\Rightarrow n$ este un divizor al lui 2024.	**1p**
n este un divizor al lui 2024 și $n\geq 30$, obținem $n\in\{44,46,88,92,184,253,506,1012,2024\}$ 9 termeni ai șirului sunt numere naturale.	**2p**

3. Pe cercul de centru O și rază r se consideră punctele A, E, M, T astfel încât E și M sunt diametral opuse, A și T sunt de aceeași parte a dreptei EM cu razele OA și OT perpendiculare, iar $\sphericalangle AOM=\sphericalangle EOT+15°30'$.

(4p) a) Dacă unghiul EOT este ascuțit, determinați măsurile arcelor mici AM și ET.

(3p) b) Dacă unghiul EOT este obtuz, determinați măsura unghiului AOM.

***

***<u>Soluție</u>*. a)** Cum punctele E și M sunt diametral opuse, atunci ME diametru, deci $\sphericalangle MOE=180°$.
Notăm $\sphericalangle EOT=a$, atunci $\sphericalangle AOM=a+15°30'$.
Cum $\sphericalangle AOM+\sphericalangle AOT+\sphericalangle EOT=\sphericalangle MOE$, avem:
$a+15°30'+90°+a=180°\Leftrightarrow 2a+105°30'=180°\Leftrightarrow 2a=74°30'\Leftrightarrow a=37°15'$
Atunci măsura arcului mic ET este egală cu măsura $\sphericalangle EOT=37°15'$ și măsura arcului mic AM este egală cu măsura $\sphericalangle AOM=52°45'$.
b) Cu notațiile de la punctul a) și
$\sphericalangle AOM+\sphericalangle AOE=\sphericalangle MOE\Leftrightarrow\sphericalangle AOM+(\sphericalangle EOT-\sphericalangle AOT)=\sphericalangle MOE$ avem:
$a+15°30'+a-90°=180°\Leftrightarrow 2a+15°30'=270°\Leftrightarrow 2a=254°30'\Leftrightarrow a=127°15'$
Atunci $\sphericalangle AOM=127°15'+15°30'=142°45'$.

<u>Barem.</u>

a) Figura cu ordinea punctelor pe cerc: *M*, *A*, *T*, *E*.	**1p**
E și *M* sunt diametral opuse, atunci *ME* diametru, deci $\sphericalangle MOE=180°$	**1p**
$\sphericalangle EOT=a$, $\sphericalangle AOM=a+15°30'$ și $\sphericalangle AOM+\sphericalangle AOT+\sphericalangle EOT=\sphericalangle MOE$ ne conduce la: $a+15°30'+90°+a=180°\Leftrightarrow 2a+105°30'=180°\Leftrightarrow 2a=74°30'\Leftrightarrow a=37°15'$	**1p**
măsura arcului mic ET este egală cu măsura $\sphericalangle EOT=37°15'$ măsura arcului mic AM este egală cu măsura $\sphericalangle AOM=52°45'$.	**1p**
b) Figura cu ordinea punctelor pe cerc: *M*, *T*, *A*, *E*.	**1p**
Cu notațiile de la punctul a) și $\sphericalangle AOM+\sphericalangle AOE=\sphericalangle MOE\Leftrightarrow\sphericalangle AOM+(\sphericalangle EOT-\sphericalangle AOT)=\sphericalangle MOE$ avem: $a+15°30'+a-90°=180°\Leftrightarrow$	**1p**
$\Leftrightarrow 2a+15°30'=270°\Leftrightarrow 2a=254°30'\Leftrightarrow a=127°15'$. Atunci $\sphericalangle AOM=142°45'$	**1p**

4. Un număr se numește ***formidabil*** dacă verifică simultan condițiile:

(i) poate fi scris ca o sumă de două numere naturale consecutive;
(ii) poate fi scris ca o sumă de trei numere naturale consecutive;
(iii) este pătrat perfect.

(3p) a) Arătați că 2025 este ***formidabil.***

(4p) b) Arătați că produsul a două numere ***formidabile*** este un număr ***formidabil***.

Dorina Cionca, Suceava

***<u>Soluție.</u>* a)** 2025 verifică cele trei condiții:
(i) $2025=1012+1013$; (ii) $2025=674+675+676$; (iii) $2025=45^2$. Deci, 2025 este ***formidabil.***
b) Fie N un număr ***formidabil***. Atunci N verifică condițiile (i), (ii) și (iii).
Numărul N se scrie ca sumă de două numere naturale consecutive dacă și numai dacă $N=a+(a+1)$, $a\in\mathbb{N}\Leftrightarrow N=2a+1\Leftrightarrow N$ este impar.

Cum produsul oricăror două numere impare este un număr impar, atunci produsul oricăror două numere ***formidabile*** îndeplinește condiția (i).

Numărul N se scrie ca sumă de trei numere naturale consecutive dacă și numai dacă $N = a + (a+1) + (a+2),\ a \in \mathbb{N} \Leftrightarrow N = 3a + 3 \Leftrightarrow N$ este divizibil cu 3.

Cum produsul oricăror două numere divizibile cu 3 este un număr divizibil cu 3, atunci produsul oricăror două numere ***formidabile*** îndeplinește condiția (ii).

Numărul N este pătrat perfect dacă și numai dacă $N = a^2,\ a \in \mathbb{N}$.

Cum produsul oricăror două pătrate perfecte este pătrat perfect, atunci produsul oricăror două numere ***formidabile*** îndeplinește condiția (iii).

Prin urmare, produsul oricăror două numere ***formidabile*** este un număr ***formidabil***.

<u>Barem.</u>

a) $2025 = 1012 + 1013$	**1p**
$2025 = 674 + 675 + 676$	**1p**
$2025 = 45^2$. Deci, 2025 este ***formidabil.***	**1p**
b) Fie N un număr ***formidabil***. Atunci N verifică condițiile (i), (ii) și (iii). Numărul N se scrie ca sumă de două numere naturale consecutive dacă și numai dacă $N = a + (a+1),\ a \in \mathbb{N} \Leftrightarrow N = 2a + 1 \Leftrightarrow N$ este impar. Cum produsul oricăror două numere impare este un număr impar, atunci produsul oricăror două numere ***formidabile*** îndeplinește condiția (i).	**2p**
Numărul N se scrie ca sumă de trei numere naturale consecutive dacă și numai dacă $N = a + (a+1) + (a+2),\ a \in \mathbb{N} \Leftrightarrow N = 3a + 3 \Leftrightarrow N$ este divizibil cu 3. Cum produsul oricăror două numere divizibile cu 3 este un număr divizibil cu 3, atunci produsul oricăror două numere ***formidabile*** îndeplinește condiția (ii).	**1p**
Numărul N este pătrat perfect dacă și numai dacă $N = a^2,\ a \in \mathbb{N}$. Cum produsul oricăror două pătrate perfecte este pătrat perfect, atunci produsul oricăror două numere ***formidabile*** îndeplinește condiția (iii). Prin urmare, produsul oricăror două numere ***formidabile*** este un număr ***formidabil***.	**1p**

Notă:
Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.