

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA - 15 februarie 2025
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a V-a

1. (7p) S-a amestecat o cantitate de banane de calitatea I, cu prețul de 12 lei kilogramul, cu o altă cantitate de banane de calitatea a II-a, cu prețul de 7 lei kilogramul. Pentru a obține aceeași sumă din vânzarea bananelor, cantitatea obținută s-a vândut cu 9 lei kilogramul. Ce cantitate s-a amestecat din fiecare calitate, dacă bananele de calitatea I au fost mai puține cu 38 kg decât cele de calitatea a II-a?

Prof. Gabriela – Cica Sascău, Rădăuți

Soluție:

Față de prețul amestecului, 1 kg de banane de cal. I este mai scump cu 3 lei, iar 1 kg de banane de cal. a II-a este mai ieftin cu 2 lei. Deci 2 kg de banane de cal. I trebuie amestecate cu 3 kg de banane de cal. a II-a.



Diferența de cantitate dintre cele două categorii este de 38 kg, adică un segment.

Așadar vor fi 76 kg banane de cal. I și 114 kg banane de cal. a II-a.

Barem:

Față de prețul amestecului, 1 kg de banane de cal. I este mai scump cu 3 lei, iar 1 kg de banane de cal. a II-a este mai ieftin cu 2 lei.	2p				
2 kg de banane de cal. I trebuie amestecate cu 3 kg de banane de cal. a II-a.	1p				
<table style="border: none; width: 100%;"> <tr> <td style="border: none;"> ----- </td> <td style="border: none;">Banane de cal. I</td> </tr> <tr> <td style="border: none;"> ----- ----- </td> <td style="border: none;">Banane de cal. a II-a</td> </tr> </table>	-----	Banane de cal. I	----- -----	Banane de cal. a II-a	2p
-----	Banane de cal. I				
----- -----	Banane de cal. a II-a				
Un segment reprezintă 38kg	1p				
Sunt 76 kg banane de cal. I și 114 kg banane de cal. a II-a	1p				

2. a) (4p) Suma a nouă numere naturale consecutive este $\overline{2x072}$. Aflați cele nouă numere.

b) (3p) Calculați ultima cifră a numărului natural $n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2025}$.

Prof. Petru Nicuță, Rădăuți

Soluție:

a) Fie $a, a + 1, a + 2, \dots, a + 8$ cele nouă numere naturale consecutive $\Rightarrow a + (a + 1) + \dots + (a + 8) = \overline{2x072}$; efectuând calculele obținem: $9a + 36 = \overline{2x072}$, deci $9a = \overline{2x036} \Rightarrow \overline{2x036} : 9 \Rightarrow x = 7$, de unde rezultă că $9a = 27036$, adică $a = 3004$; numerele sunt: 3004, 3005, ..., 3012.

b) $n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2025} / \cdot 2$

$2n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2025} + 2^{2006}$; efectuând diferența relațiilor se obține: $n = 2^{2006} - 1$
 $u(2^{2006}) = 4$, deci $u(n) = 4 - 1 = 3$.

Barem:

a) Scrie cele 9 numere: $a, a + 1, a + 2, \dots, a + 8$	1p
Determină valoarea lui $x = 7$	1p
Determină $a = 3004$	1p
Află cele 9 numere	1p
b) Determină $n = 2^{2006} - 1$	1p
Află $u(2^{2006}) = 4$	1p
Află $u(n) = 3$	1p

3. Fie numărul $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_{2n-1} a_{2n}}$ cu $2n$ cifre nenule. Se știe că orice cifră a numărului, situată pe poziție pară, este de patru ori mai mare decât precedenta de pe poziția impară (adică au proprietatea că $a_{2k} = 4 \cdot a_{2k-1}$, oricare ar fi $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$).

a) (3p) Arătați că **nu** există astfel de numere cu suma cifrelor 2024.

b) (4p) Determinați cel mai mic și cel mai mare astfel de număr cu suma cifrelor 2025.

Prof. Dorina Cionca, Suceava

Soluție:

a) Observă că $a_2 = 4 \cdot a_1$; $a_4 = 4 \cdot a_3$; $a_6 = 4 \cdot a_5$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{2n-1} + a_{2n} = a_1 + 4a_1 + a_3 + 4a_3 + \dots + a_{2n-1} + 4a_{2n-1} =$$

$$= 5a_1 + 5a_3 + \dots + 5a_{2n-1} = 5 \cdot (a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}) \in M_5$$

Cum $2024 \notin M_5$ rezultă că **nu** există astfel de numere cu suma cifrelor 2024.

b) Suma cifrelor fiind fixată, adică 2025, pentru a obține cel mai mic astfel de număr, acesta trebuie să aibă cât mai puține cifre (și cât mai mari), iar pentru a obține cel mai mare astfel de număr, acesta trebuie să aibă cât mai multe cifre.

Cum numărul are cifre nenule și $a_2 = 4 \cdot a_1$ rezultă că $a_1 \in \{1, 2\}$.

$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 2$ și $a_2 = a_4 = a_6 = \dots = 8$, iar $2025 : 10 = 202 \text{ rest } 5$ rezultă că cel mai mic astfel de număr cu suma cifrelor 2025 este $\overline{282828 \dots 2814}$
404 cifre

$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 1$ și $a_2 = a_4 = a_6 = \dots = 4$, iar $2025 : 5 = 405$ rezultă că cel mai mare astfel de număr cu suma cifrelor 2025 este $\underbrace{141414 \dots 14}_{810 \text{ cifre}}$

Barem:

a) Observă că $a_2 = 4 \cdot a_1$; $a_4 = 4 \cdot a_3$; $a_6 = 4 \cdot a_5$	1p
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{2n-1} + a_{2n} = 5 \cdot (a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}) \in M_5$	1p
$2024 \notin M_5$ rezultă că nu există astfel de numere cu suma cifrelor 2024	1p
b) - numărul are cifre nenule și $a_2 = 4 \cdot a_1$ rezultă că $a_1 \in \{1,2\}$	1p
$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 2$ și $a_2 = a_4 = a_6 = \dots = 8$, iar $2025 : 10 = 202 \text{ rest } 5$	1p
$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 1$ și $a_2 = a_4 = a_6 = \dots = 4$, iar $2025 : 5 = 405$	1p
- cel mai mic astfel de număr cu suma cifrelor 2025 este $\underbrace{282828 \dots 28}_{404 \text{ cifre}} 14$ - cel mai mare astfel de număr cu suma cifrelor 2025 este $\underbrace{141414 \dots 14}_{810 \text{ cifre}}$	1p

4. a) (4p) Verificați egalitățile:

$$2024 = 1^2 + 2^2 + 5^2 + 25^2 + 37^2$$

$$2024^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 229^2 + 2011^2.$$

b) (3p) Arătați că numărul 2024^n se poate scrie ca sumă de cinci pătrate perfecte nenule distincte, pentru orice număr natural nenul n . *Gazeta Matematică*

Soluție:

a) $1^2 + 2^2 + 5^2 + 25^2 + 37^2 = 1 + 4 + 25 + 625 + 1369 = 2024$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 229^2 + 2011^2 = 1 + 4 + 9 + 52441 + 4044121 = 4096576, \text{ iar } 2024^2 = 4096576$$

b) - discuție după valorile lui n : $n = 2k + 1$ sau $n = 2k + 2$, cu k număr natural

- dacă $n = 2k + 1 \Rightarrow 2024^{2k+1} = 2024 \cdot 2024^{2k} = (1^2 + 2^2 + 5^2 + 25^2 + 37^2) \cdot (2024^k)^2 = (2024^k)^2 + (2 \cdot 2024^k)^2 + (5 \cdot 2024^k)^2 + (25 \cdot 2024^k)^2 + (37 \cdot 2024^k)^2$

- dacă $n = 2k + 2 \Rightarrow 2024^{2k+2} = 2024^2 \cdot 2024^{2k} = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 229^2 + 2011^2) \cdot 2024^{2k} = (2024^k)^2 + (2 \cdot 2024^k)^2 + (3 \cdot 2024^k)^2 + (229 \cdot 2024^k)^2 + (2011 \cdot 2024^k)^2$

Barem:

a) – verifică, prin calcul, prima egalitate	2p
– verifică, prin calcul, a doua egalitate	2p
b) – observă că rezolvarea depinde de valorile lui n	1p

<p>- dacă $n = 2k + 1 \Rightarrow 2024^{2k+1} = (2024^k)^2 + (2 \cdot 2024^k)^2 + (5 \cdot 2024^k)^2 + (25 \cdot 2024^k)^2 + (37 \cdot 2024^k)^2$</p>	1p
<p>dacă $n = 2k + 2 \Rightarrow 2024^{2k+2} = 2024^2 \cdot 2024^{2k} = (2024^k)^2 + (2 \cdot 2024^k)^2 + (3 \cdot 2024^k)^2 + (229 \cdot 2024^k) + (2011 \cdot 2024^k)^2$</p>	1p